HAWAMAHAL
Page :
Date : / /

* वितरण मानचित्र (Distribution map) :-

प्रकृतिक एवं सास्कृतिक वातावरण के किसी तत्व का दिये हुये क्षेत्र मे वितरण प्रदर्शित करने वाले मानचित्र को वितरण मानचित्र की संज्ञा दी जाती है। चूँकि प्रत्येक मानचित्र में किसी न किसी तत्व को प्रदर्शित किया जाता है अतः उपरोक्त परिभाषा के अनुसार सभी प्रकार के मानचित्रो को वितरण मानचित्र कहा जा सकता है। भूगोल का उद्देश्य पृथ्वी तल पर भिन्न - भिन्न तत्वो के वितरणो के विश्लेषण एवं वर्णन करना है तथा वितरण मानचित्र इस उद्देश्य की पूर्ति के लिये एक महत्वपूर्ण साधन होते है। इन मानचित्रो में प्रदर्शित किसी तत्व के वितरण का i) घनत्व ii) प्रतिरूप (Pattern), तथा iii) परिक्षेपण (dispersion), देखकर इस तत्व के आधार पर स्थानो या क्षेत्रो के तुलनात्मक महत्व को समझा जा सकता है।

वितरण मानचित्र बनाने के लिये निम्नलिखित साज - समान की आवश्यकता होती है।

1. मानचित्र में प्रदर्शित किये जाने वाले तत्व के सही - सही सांख्यिकीय आकडे है।
2. संबंधित प्रदेश का किसी समक्षेत्र प्रक्षेप पर बनाया गया रूपरेखा मानचित्र (Outline Mp) जिसमे आवश्यकतानुसार प्रशासनिक अथवा प्राकृतिक विभागो की सीमाएँ अंकित हो।
3. संबंधित क्षेत्र या देश के आवश्यक सहायक मानचित्र जैसे - बिन्दु विधि के द्वारा जनसंख्या का वितरण प्रदर्शित करने के लिये स्थलाकृतिक मानचित्र जिसमें नगरीय व ग्रामीण बस्तियो की स्थितियां दी गयी हो। इसी प्रकार परिवहन, मार्गो के लिये उच्चावच व अपवाह मानचित्रो की तथा फसलो का वितरण दिखलाने के लिये जलवायु व मृदा मानचित्रो की आवश्यकता होती है।
4. मानचित्रण - सामग्री एवं आवश्यक उपकरण।

Teacher's Signature: ....

* वितरण मानचित्र बनाने के सामान्य नियम (General Rules for Drawing Distribution map) :-

कोई वितरण मानचित्र स्वतः स्पष्ट तभी हो सकता है जब उसमे सभी आवश्यक प्रारम्भिक सूचनाएं जैसे - i) मानचित्र में प्रदर्शित क्षेत्र का नाम ii) मानचित्र की अन्तर्वस्तु का शीर्षक iii) आकड़ो का वर्ष व प्राप्ति का स्त्रोत iv) मानचित्र में प्रयोग किये गये चिन्हो, प्रतीको, रंगों व आभाओ का संकेत v) मापनी तथा vi) अक्षांश - देशान्तर प्रक्षेप दी गयी हो। इनमे पाँच सूचनाओ को सभी प्रकार के वितरण मानचित्रो में देना आवश्यक होता है तथा प्रक्षेप संबंधी केवल बड़े - बड़े क्षेत्रो के बड़े - बड़े वितरण मानचित्रो में ही दी जाती है।

वितरण मानचित्र उपयोगी होने के साथ - साथ आकर्षक भी होने चाहिये। इसके लिये निम्नलिखित बातो पर विशेष ध्यान दिया जाना चाहिये।

1. जैसा कि आगे चलकर बतलाया जायेगा वितरण मानचित्र बनाने की कई विधियां होती है। परन्तु ऐसी कोई एक विधि नही है जिसके द्वारा सभी प्रकार के वितरणो को प्रदर्शित किया जा सके। प्रायः एक विधि के द्वारा केवल एक या दो प्रकार के वितरणो को ही दिखलाना संभव होता है। अतः दिये हुये आकड़ो को मानचित्र में प्रदर्शित करने के लिये सही विधि का चयन करना परम आवश्यक है।

2. मानचित्र में रूढ़ चिंह, प्रतीक, छायाएं, आरेख व आलेख आदि अंकित करते समय पूरी बुद्धिमता बर्तनी चाहिए जिससे मानचित्र को देखकर एक ही दृष्टि में अन्तर्वस्तु या आकड़ो के सभी भेद एकदम स्पष्ट हो जाये।

3. मानचित्र यथासंभव स्वच्छ होने चाहिए तथा उनमे द्रष्टा को अपनी ओर आकर्षित करने का गुण विद्यमान होना चाहिये। इसके लिये विद्यार्थियो को मानचित्रकला की तकनीको व उपकरणो का समुचित ज्ञान होना आवश्यक है।

Teacher's Signature: ....

* आकड़ो का संग्रह (Collection of Data) :-

कोई आकड़ा प्रथम बार संग्रह किया गया है अथवा उसे किसी अन्य स्त्रोत से प्राप्त किया गया है इस आधार पर आकड़ो को दो भागो में विभाजित किया जाता है।

1. प्राथमिक आँकड़े (Primary data)
2. गौण या द्वितियक आँकड़े (Secondary data)

जो आंकड़े किसी अनुसन्धानकर्ता या संस्था के द्वारा पहली बार एकत्रित किये जाते है इन्हें प्राथमिक आंकड़े कहते है। इसके विपरित वे आंकड़े जिन्हे कोई अनुसन्धानकर्ता स्वयं एकत्रित न करके किसी प्रकाशित अथवा अप्रकाशित स्त्रोतो से प्राप्त करता है उसके लिये द्वितियक आंकड़े होगे। इस प्रकार प्राथमिक आंकड़े मौलिक रूप से एकत्रित किये जाते है, जबकि द्वितीयक आंकड़े पहले से एकत्रित होते है।

Date............................ Teacher's Signature..........................

HAWAMAHAL
Page :
Date : / /

आंकड़ो के संग्रह की विधियाँ

- प्राथमिक आंकड़े
  - व्यक्तिगत खोज
  - साक्षात्कार
  - प्रश्नावली
  - अनुसूची
  - अन्य
- गौण या द्वितीयक आंकड़े
  - प्रकाशित स्रोत
    - अन्तर्राष्ट्रीय प्रकाशन
    - सरकारी प्रकाशन
    - अर्द्ध-सरकारी प्रकाशन
    - निजी प्रकाशन
    - पत्र पत्रिकाएं
    - अन्य
  - अप्रकाशित स्रोत
    - सरकारी अभिलेख
    - अर्द्ध सरकारी अभिलेख
    - नीजि अभिलेख
    - अन्य अभिलेख

Date.............................. Teacher's Signature..........................

HAWAMAHAL
Page :
Date : / /

* वितरण मानचित्र बनाने की विधियाँ

(Methods of Drawing Distribution Map):-

वितरण मानचित्र बनाने की विधियाँ को दो वर्गों में विभाजित किया जा सकता है।

1) अमात्रात्मक विधियाँ (Non quantitative methods)
2) मात्रात्मक विधियाँ (quantitative methods)

प्रथम प्रकार की विधियाँ के द्वारा बनाये गये वितरण मानचित्रों को गुण प्रधान मानचित्र (quantitative maps) कहते हैं तथा मात्रात्मक विधियाँ के अनुसार बनाये गये वितरण मानचित्र (statistical maps) कहलाते है। गुण प्रधान मानचित्रों में किसी तत्व या वस्तु का वितरण दिखलाते समय वितरण के घनत्व पर कोई ध्यान नहीं दिया जाता है। अर्थात् इन मानचित्रों को देखने से प्रदर्शित किये गये तत्व के घनत्व की क्षेत्रिय न्यूनाधिकता का कोई बोध नहीं होता है।

इसके विपरीत सांख्यिकीय मानचित्रों का मूल उद्देश्य किसी तत्व या वस्तु का मूल्य, मात्रा या घनत्व की क्षेत्रिय भिन्नता को चित्रित करना होता है। दोनो मानचित्रों का यही एकमात्र अंतर होता है।

Date.............................. Teacher's Signature..........................

वितरण मानचित्र बनाने की विधियाँ

- अमात्रात्मक विधियाँ
  - रंगा रेखाविधि
  - सामान्य छाया विधि
  - चित्रीय विधि
  - वर्ण प्रतीक विधि
    - ज्यामितीय प्रतीक विधि
    - चित्रमय प्रतीक विधि
    - मूल्याधार प्रतीक विधि
  - नामांकन विधि
- मात्रात्मक विधियाँ
  - वर्णमात्री विधि
  - सममान रेखा विधि
  - बिन्दु विधि
  - आरेखी विधि

समान्तर माध्य
(Arithmetic mean)

गणितीय माध्यो में समान्तर माध्य सबसे अधिक महत्वपूर्ण है। साधारण बोलचाल की भाषा में समान्तर माध्य का अर्थ औसत होता है। यदि किसी समंक श्रेणी के समस्त मूल्यो के योग में उनकी संख्या (पदो की संख्या) से भाग दे दिया जाये तो इस प्रकार प्राप्त भाजनफल उस समंक श्रेणी के समान्तर माध्य को प्रकट करेगा। उदाहरणार्थ यदि किसी परिवार में 5 सदस्य हैं तथा वे प्रतिदिन क्रमश: 12, 10, 8, 6 तथा 4 रुपये कमाते है।

तो उस परिवार की प्रतिव्यक्ति आय का समान्तर माध्य या औसत $(12+10+8+6+4)/5 = 8$ रुपये होगा। समान्तर माध्य ज्ञात करने की निम्नांकित दो विधियाँ होती है।

1 प्रत्यक्ष विधि (Direct method) :-

उपर्युक्त उदाहरण में जिस विधि का प्रयोग करके किसी परिवार में प्रति व्यक्ति दैनिक आय निकाली गयी है। वह समान्तर माध्य ज्ञात करने की प्रत्यक्ष विधि कहलाती है। इस विधि का प्रयोग उस दशा में उपयोगी होता है जब दी हुयी समंक - श्रेणी में चर - मूल्यो के मान दशमलव में न हो तथा उनकी संख्या भी कम हो।

2. लघु विधि / अप्रत्यक्ष विधि (Short cut method / Indirect Method)

यदि समंक श्रेणी में पद - मूल्य अधिक हो तथा उनके मानो में अधिक अन्तर न हो तो लघु विधि के द्वारा समान्तर माध्य ज्ञात करने में सफलता रहती है, इस विधि में सर्वप्रथम कोई कल्पित माध्य चुन लेते है। इसके पश्चात इस कल्पित माध्य से विभिन्न पद - मूल्यो के - अथवा - में जैसी भी परिस्थिति हो, विचलन (deviations) ज्ञात करते है। तत्पश्चात् प्रत्यक्ष विधि के अनुसार इन विचलनो का समान्तर माध्य निकालकर उसमें पूर्व कल्पित माध्य के मान को जोड़ देते हैं।

Date.................................. Teacher's Signature..............................

सांख्यिकी में सूत्रों (formulae) की सहायता से समान्तर माध्य ज्ञात करते है। अब चुंकि भिन्न-भिन्न प्रकार की समंकमालाओं में भिन्न-भिन्न प्रकार के सूत्रों का प्रयोग होता है। अतः किसी सूत्र का चयन करने से पूर्व दी गयी समंकमाला की बनावट तथा प्रयोग की जाने वाली विधि पर भलि-भांति विचार करना आवश्यक है।

समान्तर माध्य ज्ञात करने के सूत्र निम्नांकित है।

समंकमाला का प्रकार	सांख्यिकी सूत्र	
	प्रत्यक्ष विधि	अप्रत्यक्ष विधि
व्यक्तिगत श्रेणी	$\bar{x} = \frac{\Sigma X}{N}$	$\bar{x} = A + \frac{\Sigma dx}{N}$
खण्डित श्रेणी	$\bar{x} = \frac{\Sigma fX}{N}$	$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fdx}{N}$
अखण्डित श्रेणी	$\bar{x} = \frac{\Sigma fX}{N}$	$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fdx}{N}$

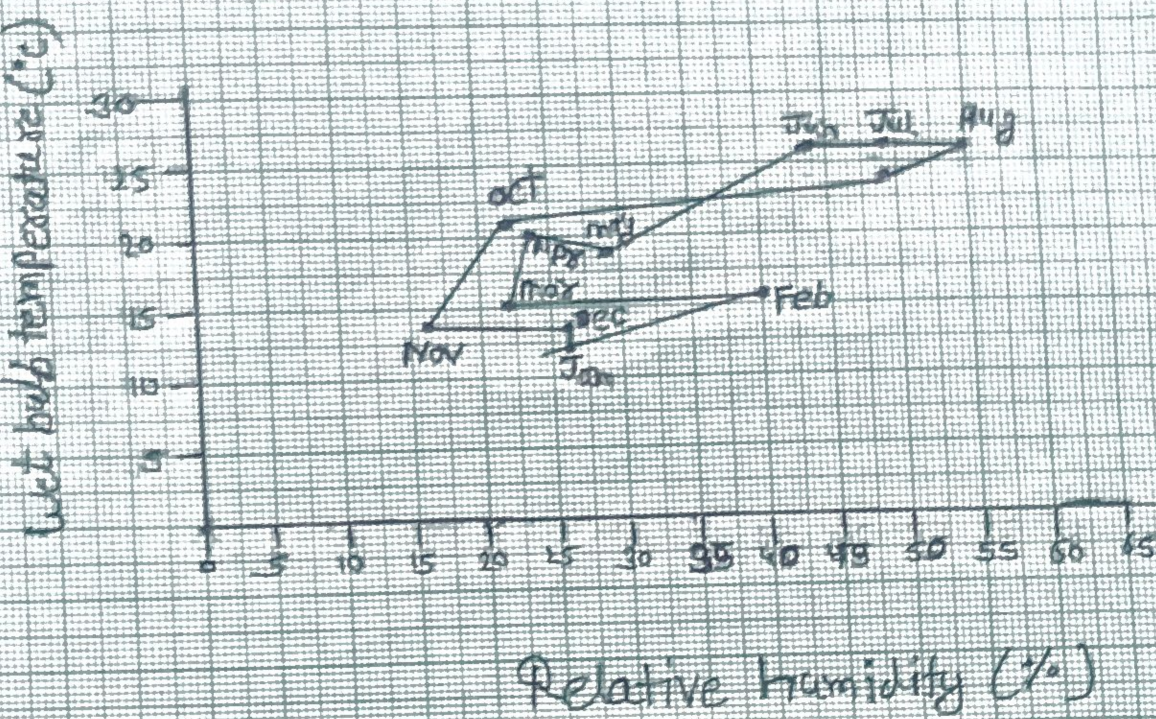
* क्लाइमोग्राफ (Climograph) :-

किसी स्थान के औसत मासिक आर्द्र बल्ब तापमान (wet-bulb temperature) एवं आपे
आर्द्रता (relative humidity) के आंकडो को ग्राफ पेपर पर एक-दु
के सामने अंकित करके बनाये गये आलेख को उस स्थान का
क्लाइमोग्राफ या क्लाइमोग्राम (climogram) कहते है।

Example :- निम्नलिखित आंकडो की सहायता से जोधपुर का क्लाइमोग्राफ बनाइए?

	Jan	feb.	mar	April	may	June	July	Aug	Sep.	oct	Nov	Dec.
आर्द्र-बल्ब तापमान (से.ग्रे.)	12	16	15	20	19	26	26	26	26	21	16	14
आपेक्षित आर्द्रता	26	40	22	23	२९	५३	४९	५५	४५.	~~22~~	~~17~~	26

CLIMOGRAPH OF JODHPUR



Teacher's Signature.............................

हीदरग्राफ (Hythergraph) :-

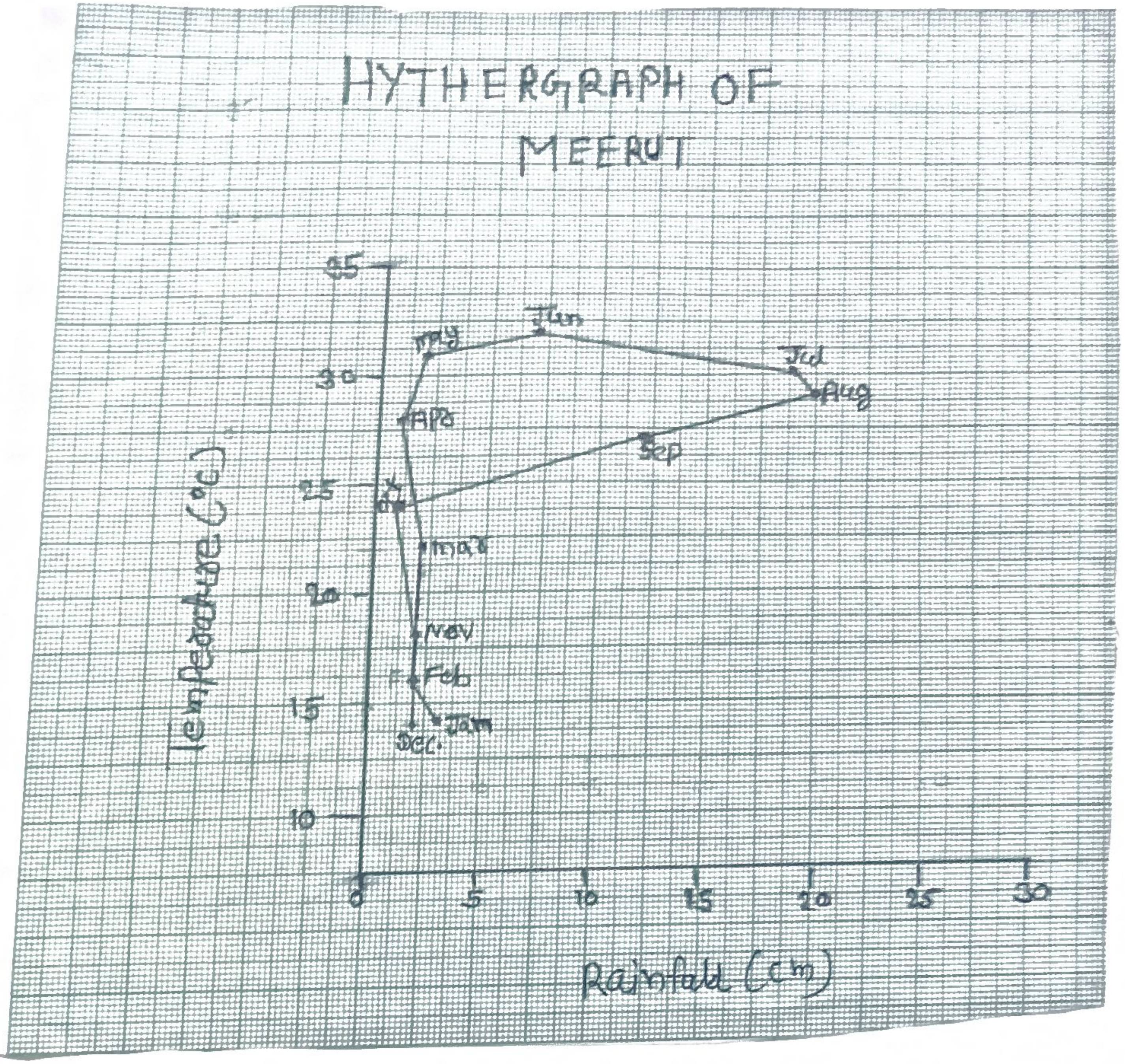
एक विशेष प्रकार का क्लाइमोग्राफ, जिसमे औसत मासिक तापमान व औसत मासिक वर्षा के मूल्यो को क्रमशः कोटियो (ordinates) व भुजो (abscissae) के रूप में अंकित करते है। हीदरग्राफ कहलाता है।

किसी स्थान का हीदरग्राफ बनाने की वह विधि है जो क्लाइमोग्राफ बनाने की होती है। अन्तर केवल इतना है कि हीदरग्राफ में औसत मासिक तापमान व औसत मासिक वर्षा के आँकडो का प्रयोग है।

Example :- निम्नलिखित आकडो की सहायता से मेरठ का हीदरग्राफ बनाइये !-

	Jan	feb	march	April	may	June	July	Aug	sep	oct	NOV.	Dec
औसत मासिक तापमान (सेग्रे)	14	16	22	28	31	32	30	29	27	24	18	14
औसत मासिक वर्षा (Cm)	3	2	2	1	2	7	19	20	12	1	2	2

Date.............................. Teacher's Signature..........................


HYTHERGRAPH OF MEERUT
Temperature (°C)
Rainfall (cm)
35
30
25
20
15
10
0
5
10
15
20
25
30
Jun
May
Jul
Aug
Apr
Sep
Mar
Nov
Feb
Jan
Dec.

CLIMATOGRAPH OF

क्लाइमेटोग्राफ (Climatograph) :-

क्लाइमेटोग्राफ के द्वारा किसी स्थान के मासिक तापमान व मासिक वर्षा दोनों की दशाएँ प्रकट की जाती है। यह एक प्रकार का वृत्ताकार आलेख है, जिसे इरविन् रैंज ने अर - आलेख (spoke graph), एन. मुन्स ने व आर. हार्टशार्न ने जलवायु आलेख (Climatograph) तथा टी. डब्ल्यू. बर्च ने ध्रुवीय चार्ट (Polar chart) व घड़ी आलेख (Clock graph) नाम से पुकारा है।

इन विद्वानों के द्वारा निर्मित क्लाइमेटोग्राफ की रचना - विधियों में थोड़ा - थोड़ा सा अन्तर है। यहाँ इरविन रैंज के द्वारा बतलायी गई विधि को समझाया गया है।

रैंज ने अर - आरेख या क्लाइमेटोग्राफ से औसत मासिक तापमान व औसत मासिक वर्षा के दो वक्र बनाकर किसी एक वक्र (सामान्य वर्षा के वक्र) से घिरे भाग में कोई छाया भर देते हैं। जिससे दोनों वक्र अलग - अलग स्पष्ट दिखलायी दे। इन वक्रों को खींचने के लिये वृत्त में प्रत्येक महीने के अर्द्धव्यास अर्थात अरीय अक्ष (radial co-ordinate) पर तापमान व वर्षा के दिये हुए मूल्यों को ओगिलवी के मार्गोग्राफ में बतलायी गयी विधि के अनुसार अंकित किया जाता है। आलेख में तापमान व वर्षा की मापनियों को सकेन्द्र वृत्तों के द्वारा प्रदर्शित करते हैं। ये वृत जिस अनुपात में तापमान के मूल्यों को प्रदर्शित करते हैं उसी अनुपात में उन पर वर्षा के मूल्य लिख देते हैं। इस प्रकार इन वृत्तों से तापमान व वर्षा दोनों की मापनियाँ प्रदर्शित हो जाती हैं।

Date.............................. Teacher's Signature..........................

CLIMATOGRAPH OF

Example: निम्नलिखित आंकड़ों की सहायता से कलकत्ता का क्लाइमेटोग्राफ बनाइये :-

	Jan	Feb	march	April	may	June	July	Aug	Sep	oct	Nov	Dec
औसत तापमान (°C)	18	21	21	29	30	29	28	27	28	26	22	18
औसत वर्षा (cm)	1.0	2.8	3.5	5.0	12.7	28.4	30.7	29.2	22.3	11.0	1.3	0.5

क्लाइमेटोग्राफ बनाने के लिये किसी सुविधानुसार चुने गये अर्द्धव्यास (मान लीजिये 4cm) का वृत्त बनाकर उसमें केन्द्र पर 30-30 अंशों के अन्तराल पर 12 अर्द्धव्यास या त्रिज्या रेखा खींचिये तथा थोर्नथवेट के आरोग्राफ की भांति 12 बजे की स्थिति से प्रारम्भ करते हुये इन अर्द्धव्यासों पर घड़ी की सुई की दिशा में जनवरी, फरवरी, मार्च आदि महिनों के नाम लिखिये।

अब मान लीजिये वृत्त के अर्द्धव्यास की पूरी लम्बाई (अर्थात 4cm) तापमान के अधिकतम मूल्य (अर्थात 30°C) को प्रकट करती है तो वलय आलेख के सूत्रानुसार

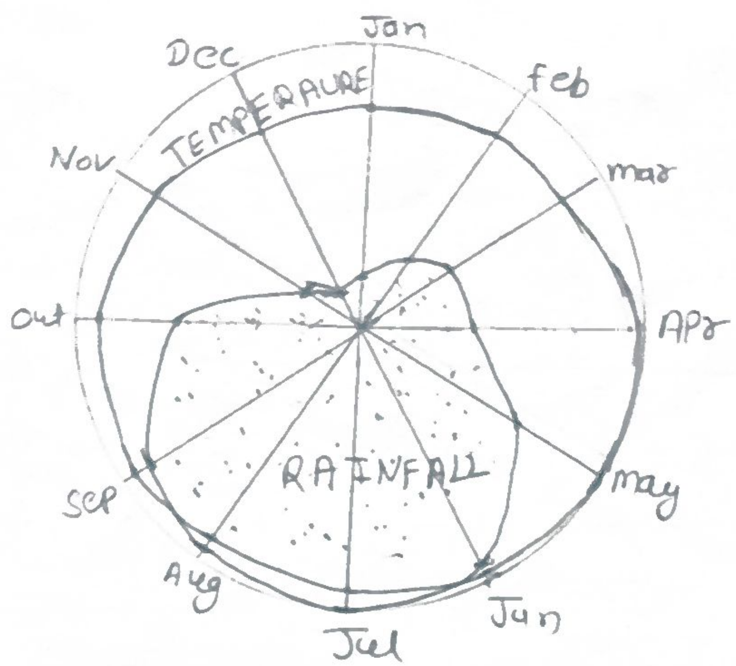
अर्द्धव्यास पर केन्द्र से $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{30}} \times 4 = 3.1$ cm की दूरी पर अंकित किया गया चिंह जनवरी के तापमान को प्रकट करेगा। इसी प्रकार फरवरी के चिन्ह की केन्द्र से दूरी $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{30}} \times 3 = 3.3$ cm होगी। इसी सूत्र का प्रयोग करते हुये प्रत्येक महिने के तापमान के चिह्नों की केन्द्र से दूरी ज्ञात कीजिये तथा उसे वृत्त के संबंधित अर्द्धव्यास पर अंकित कीजिये। इस प्रकार अंकित किये गये चिन्हों को मिलाते हुये तापमान के वक्र को पूर्ण कीजिये।

जिस प्रकार अर्द्धव्यास पर तापमानों की दूरियों को अंकित किया गया है उसी प्रकार उन पर वर्षा की दूरियों के चिन्ह अंकित किये जायेंगे।

	वृत्त के केन्द्र से दूरी (cm)											
	Jan	feb	march	April	may	June	July	Aug	sep.	oct	NOV	Dec
तापमान	3.1	3.3	3.3	3.9	4.0	3.9	3.8	3.7	3.8	3.7	3.4	3.1
वर्षा	0.7	1.2	1.4	1.6	2.6	3.8	4.1	3.9	3.5	2.4	0.8	0.5

Date.......................... Teacher's Signature..........................

CLIMATOGRAPH OF CALCUTTA



I व्यक्तिगत श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना (Calculation of arithmetic mean in individual Series) :-

व्यक्तिगत श्रेणी में प्रत्येक इकाई का अलग-2 व्यक्तिगत मूल्य लिखा होता है तथा ये इकाइयाँ किसी समूह में नहीं होती अपितु इनके नाम अलग - अलग दिये होते है।

Example :- किसी कारखाने के 10 श्रमिको का मासिक वेतन निम्नलिखित है :-

श्रमिक	वेतन
A	850
B	865
C	870
D	890
E	900
F	915
G	935
H	955
I	970
J	990

श्रमिक	वेतन
A	850
B	865
C	870
D	890
E	900
F	915
G	935
H	955
I	970
J	990
N = 10	$\Sigma X = 9140$

प्रत्यक्ष तथा लघु श्रेणी से श्रमिको के वेतन का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिये :.

a) व्यक्तिगत श्रेणी में प्रत्यक्ष विधि के द्वारा निम्न सुत्र की सहायता से समान्तर माध्य की गणना होगी

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N}$$

$\bar{X}$ = समान्तर माध्य

ΣX = व्यक्तिगत मूल्यो का योग

N = व्यक्तिगत मूल्यो की संख्या

$$\bar{X} = \frac{9140}{10} = 914$$

$$\bar{X} = 914$$

अतः वेतनो का समान्तर माध्य = 914 रुपये।

Teacher's Signature: ....

b) लघु/ अप्रत्यक्ष विधि :-

व्यक्तिगत श्रेणी में लघु विधि से समान्तर माध्य ज्ञात करने के लिये निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं।

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma dx}{N}$$

$\bar{X}$ = समान्तर माध्य, A = कल्पित माध्य, Σdx = कल्पित माध्य से विभिन्न व्यक्तिगत मूल्य के विचलनों का योग

N = व्यक्तियों की संख्या

श्रमिक	मासिक वेतन(रु) x	कल्पित माध्य (A) 900 dx = (X − A)
A	880	880 − 900 = −50
B	865	865 − 900 = −35
C	870	870 − 900 = −30
D	890	890 − 900 = −10
E	900(A)	900 − 900 = 0
F	915	915 − 900 = 15
G	935	935 − 900 = 35
H	955	955 − 900 = 55
I	970	970 − 900 = 70
J	990	990 − 900 = 90
N = 10		Σdx = 265 − 125
		Σdx = 140

लघु विधि सूत्र का प्रयोग करके समान्तर माध्य:

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma dx}{N}$$

$$\bar{X} = 900 + \frac{140}{10} = 900 + 14 = 914$$

$$\bar{X} = 914$$

वेतनों की समान्तर माध्य = 914 रुपये

Teacher's Signature: ....

HAWAMAHAL
Page :
Date : / /

II खण्डित श्रेणी में बहुलक की गणना (Calculation of mode in discrete Series)

खण्डित श्रेणी में बहुलक ज्ञात करने की निम्नलिखित विधियाँ हैं-

1. निरीक्षण विधि (Inspection method) :- इस विधि में आवृतियाँ नियमित होने पर इसका प्रयोग होता है।
2. समूहन विधि (Grouping method) :- आवृतियाँ अनियमित होने पर समूहन विधि के द्वारा बहुलक का निर्धारण किया जाता है। इस विधि को पढ़ने से पूर्व यह जान लेना आवश्यक है कि निम्नांकित किसी भी एक दशा के मिलने पर आवृतियाँ अनियमित मानी जाती है।

1 आवृतियाँ असमान व स्वतंत्र रूप से कभी बढ़ रही है तथा कभी घट रही है।
2 अधिकतम आवृति श्रेणी के मध्य में होने के बजाय बिल्कुल प्रारम्भ में अथवा बिल्कुल अन्त में स्थित हो।
3 अधिकतम आवृति के एक ओर की आवृतियाँ दूसरी तरफ की आवृतियों से एकदम बहुत भिन्न हो।
4 यदि श्रेणी में अधिकतम आवृति किसी एक स्थान के बजाय दो या दो से अधिक स्थानों पर हो।

समूहन विधि के द्वारा बहुलक ज्ञात करने के लिए एक सारणी बनाते हैं जिसमें 6 कॉलम होते हैं।

Example:- किसी सर्वेक्षण में प्राप्त निम्नांकित समंकों के आधार पर समूहन विधि के अनुसार बहुलक मूल्य ज्ञात कीजिए :

पक्के मकानों की संख्या	20	21	22	23	24	25	26	27	28
ग्रामों की संख्या	8	35	15	10	30	25	20	8	10

Date..............................
Teacher's Signature..........................

हल :

खण्डित श्रेणी में समूहन विधि के द्वारा बहुलक का निर्धारण

मकानों की संख्या (मूल्य)	ग्रामों की संख्या (आवृत्ति समूहन)						अधिकतम आवृत्ति	
	दी गयी आवृत्ति	2-2 के योग	पहली को छोड़कर 2-2 के योग	3-3 के योग	पहली को छोड़कर 3-3 के योग	पहली दो को छोड़कर 3-3 के योग	टैली	संख्या
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
20	8	43						
21	35		50	58				–
22	15	25			65		II	2
23	10		40				II	2
24	30	55		65		55	II	2
25	25		45		75		IIII	4
26	20	25					III	3
27	5		17	37		50	I	1
28	10							–

उपर्युक्त सारणी से ज्ञात होता है कि २५ की टैली ४ है जो अन्य मूल्यों से अधिक है। अतः बहुलक मूल्य २५ होगा।

Date............................ Teacher's Signature........................

बहुलक या मोड (Mode)

बहुलक को अंग्रेजी में Mode कहते है जो फ्रेन्च भाषा के La mode शब्द से बना है तथा जिसका अर्थ प्रकार, ढंग, फैशन या रिवाज होता है। सांख्यिकी में इस शब्द का प्रयोग अधिकतम आवृत्ति वाले मूल्य के लिये किया जाता है। उदाहरणार्थ 2,4,5,4,6,5,4, 3 व 2 पद मूल्यो वाली किसी एकल श्रेणी मे 4 की आवृत्ति सबसे अधिक बार हुई है अतः 4 को इस श्रेणी का बहुलक या बहुलक मूल्य कहा जायेगा। कुछ विद्वानो ने बहुलक को समक श्रेणी का ऐसा मूल्य माना है जिसके निकट श्रेणी की अधिक से अधिक इकाईयाँ केन्द्रित होती है। अतः बहुलक की गणना का उद्देश्य समंक की अधिकांश इकाईयो के बारे मे कोई निष्कर्ष निकाला होता है। उदाहरणार्थ यदि किसी कारखाने मे कार्य करने वाले श्रमिको की दैनिक बहुलक मजदूरी 50 रुपये है तो इसका यह अर्थ निकाला जायेगा कि उस कारखाने मे 50 रुपये दैनिक मजदूरी प्राप्त करने वाले श्रमिको की संख्या सबसे अधिक है।

I व्यक्तिगत श्रेणी मे बहुलक की गणना (Calculation of mode in individual series)

व्यक्तिगत श्रेणियो मे बहुलक ज्ञात करने की निम्नांकित दो प्रमुख विधियाँ है:-

1 व्यक्तिगत श्रेणी को खण्डित श्रेणी मे बदलकर (By changing the individual series into discrete series)

यदि व्यक्तिगत श्रेणी के अनेक मूल्यो की दो या दो से अधिक बार पुनरावृत्ति हो रही है तो उस श्रेणी को खण्डित श्रेणी मे परिवर्तित करके यह देखा जाता है कि इस नवनिर्मित श्रेणी मे आवृत्तियो का वितरण नियमित है अथवा अनियमित। नियमित वितरण मे श्रेणी के आरम्भ से मध्य तक आवृत्तियाँ निरन्तर बढती जाती है तथा इसके बाद निरन्तर घटती जाती है। इस प्रकार नियमित वितरण में अधिकतम आवृत्ति वाला मूल्य बहुलक होता है जिस श्रेणी को देखकर या निरीक्षण मात्र से बहुलक ज्ञात होता है। इसके विपरीत यदि आवृत्तियाँ अनियमित है तो समूहन विधि के द्वारा बहुलक निश्चित करते है।

Date........................ Teacher's Signature..........

Example :- नीचे किसी ग्राम के 14 प्रतिदर्श परिवारो मे साक्षर व्यक्तियो की संख्याएं दी गयी है। बहुलक साक्षर संख्या ज्ञात कीजिये।

3, 2, 1, 3, 2, 5, 4, 3, 4, 2, 4, 3, 4, 3

हल - उपर्युक्त व्यक्तिगत समको को निम्न प्रकार खण्डित श्रेणी में परिवर्तित कीजिये।

साक्षर व्यक्ति	1	2	3	4	5
आवृत्ति (प्रतिदर्श परिवार संख्या)	1	3	5	4	1

उपर्युक्त खण्डित श्रेणी को देखने से ज्ञात होता है कि इसकी आवृतियाँ नियमित है अर्थात वे समान रूप से घट बढ़ रही है। अतः निरिक्षण विधि के अनुसार 3 की आवृत्ति सबसे अधिक बार हुयी है।

इसलिये 3 साक्षर बहुलक है।

2. व्यक्तिगत श्रेणी को अविच्छन्न श्रेणी में बदलकर (By Changing the Individual Series into continuous Series)

कभी-कभी व्यक्तिगत श्रेणी के सभी मूल्य एक दूसरे से भिन्न होते है तथा उन्हे खण्डित श्रेणी में परिवर्तित करना असम्भव हो जाता है, ऐसी दशा में व्यक्तिगत श्रेणी को अविच्छन्न श्रेणी में बदलने के उपरान्त पहले समूहन विधि के द्वारा अधिक आवृति वाला वर्गान्तर ज्ञात करते है तथा उसके बाद एक सूत्र की सहायता से बहुलक निकाला जाता है।

Date.............................. Teacher's Signature..........................

II खण्डित श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना (Calculation of arithmetic mean in discrete series)

खण्डित श्रेणी में प्रत्येक इकाई का अलग-अलग व्यक्तिगत मूल्य लिखने के बजाए समान चर मूल्य वाली इकाईयों की संख्या की आवृत्ति लिखी जाती है। व्यक्तिगत श्रेणी की भांति किसी खण्डित श्रेणी में भी समान्तर माध्य ज्ञात करने की निम्नांकित दो विधियां होती हैं।

a) प्रत्यक्ष विधि (direct method) !-

सूत्र

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fx}{N}$$

$\bar{X}$ = समान्तर माध्य, Σfx = मूल्यों का कुल योग, N = आवृत्तियों का योग, (Σf) = इकाईयों की कुल संख्या

Example :- किसी कारखाने में कार्यरत श्रमिकों की दैनिक मजदूरी निम्नांकित है।

श्रमिक की संख्या	50	30	25	25	20	15	15	20
मजदूरी	62.5	63.5	64.5	65.5	66.5	67.5	68.5	69.5

प्रत्यक्ष विधि द्वारा माध्य दैनिक मजदूरी ज्ञात कीजिये

समान्तर माध्य की गणना (प्रत्यक्ष विधि)

दैनिक मजदूरी (रु.) x	श्रमिकों की संख्या f	दैनिक मजदूरी व श्रमिकों की संख्या का गुणनफल fx
62.5	50	3125.0
63.5	30	1905.0
64.5	25	1612.5
65.5	25	1637.5
66.5	20	1330.0
67.5	15	1012.5
68.5	15	1027.5
69.5	20	1390.0
	$N = \Sigma f = 200$	$\Sigma fx = 13040.0$

सूत्र !- $\bar{X} = \frac{\Sigma fx}{N}$

$$\bar{X} = \frac{13040}{200} = 65.20$$

$$\bar{X} = 65.20$$

माध्य दैनिक मजदूरी = 65 रु. 20 पैसे

Date............................ Teacher's Signature........................

b अप्रत्यक्ष / लघु विधि (Indirect Method / short-cut Method):-

लघु विधि में समान्तर माध्य की गणना निम्नांकित सूत्र द्वारा की जाती है।

$\bar{X} = A + \frac{\Sigma f dx}{N}$ $\bar{X}$ = समान्तर माध्य, A = कल्पित माध्य

$\Sigma f dx$ = कल्पित माध्य से x मूल्यों के विचलनों को संबंधित मूल्य की आवृत्ति से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफलों का योग, N = आवृत्तियों का योग

खण्डित श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना (लघु विधि)

दैनिक मजदूरी (रू) x	श्रमिकों की संख्या	कल्पित माध्य (A) 65.5 dx = (x − A)	विचलन व आवृति का गुणनफल fdx
62.5	50	62.5 − 65.5 = −3	50 × −3 = −150
63.5	30	63.5 − 65.5 = −2	30 × −2 = −60
64.5	25	64.5 − 65.5 = −1	25 × −1 = −25
65.5	25	65.5 − 65.5 = 0	25 × 0 = 0
66.5	20	66.5 − 65.5 = 1	20 × 1 = 20
67.5	15	63.5 − 65.5 = 2	15 × 2 = 30
68.5	15	68.5 − 65.5 = 3	15 × 3 = 45
69.5	20	69.5 − 65.5 = 4	20 × 4 = 80
	Σf = N = 200		Σfdx = −235 + 175 = −60

सूत्र = $\bar{X} = A + \frac{\Sigma f dx}{N}$

$X = 65.5 + \frac{(-60)}{200} = 65.5 - \frac{69}{200} = 65.5 - 0.3 = 65.2$

$\bar{X} = 65.2$ अतः माध्य दैनिक मजदूरी = 65 रू. 20 पैसे

Date.............................. Teacher's Signature..........................

III अविच्छिन्न / अखण्डित श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना (calculation of arithmetic meanin continuous)

जैसा कि हम पहले बतला चुके है किसी अविच्छिन्न श्रेणी में पद - मूल्य वर्गान्तरो के रूप में लिखे होते है। अतः ऐसी श्रेणियो में सर्वप्रथम प्रत्येक वर्गान्तर का मध्य - मूल्य (mid-value) ज्ञात करते है इसके पश्चात इन मध्य मूल्यो को x मूल्य मानते हुए खण्डित श्रेणी के सूत्रो के अनुसार प्रत्यक्ष अथवा लघु विधि के अनुसार अविच्छिन्न श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना की जा सकती है।

किसी वर्गान्तर का मध्य मूल्य उस वर्गान्तर के निचले तथा ऊपरी सीमा मूल्यो के योग का आधा होता है। उदाहरणार्थ (0 से 10) मान वाले वर्गान्तर का मध्य मूल (0+10)/2 = 5 होगा। इसी प्रकार (10 से 20) के मध्य मूल्य (10 + 20)/2 = 18 होगा।

Example :- निम्नांकित अविच्छिन्न श्रेणी में प्रत्यक्ष तथा लघु दोनो विधियो के द्वारा अलग-2 समान्तर माध्य ज्ञात कीजिये

प्राप्तांक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
छात्रो की संख्या	40	30	35	25	20

a) प्रत्यक्ष विधि द्वारा हल :-

सूत्र - $\bar{X} = \frac{\Sigma fx}{N}$

अविच्छिन्न श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना (प्रत्यक्ष विधि)

प्राप्तांक (वर्गान्तर)	मध्य मूल्य x	विद्यार्थियों की संख्या / आवृत्ति f	मध्य मूल्य तथा विद्यार्थी संख्या का गुणनफल fx
0-10	5	40	5x 40 = 200
10-20	15	30	15 x 30 = 450
20-30	25	35	25 x 35 = 875
30-40	35	25	35 x 25 = 875
40-5	45	20	45 x 20 = 900
50		N = Σf = 150	Σfx = 3300

सूत्र = $\bar{X} = \frac{\Sigma fx}{N}$

$\bar{X} = \frac{3300}{150} = 22$

$\bar{X} = 22$

Teacher's Signature..........
Date..........

b लघु विधि के द्वारा हल :-

सूत्र = $\overline{X} = A + \frac{\Sigma fdx}{N}$

अविच्छिन्न श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना (लघु विधि)

प्राप्तांक वर्गान्तर	मध्य मूल्य x	विद्यार्थियों की संख्या आवृति f	कल्पित माध्य(A) 25 dx = X − A dx	विचलन तथा आवृति का गुणनफल fdx
0 − 10	5	40	5 − 25 = −20	−800
10 − 20	15	30	15 − 25 = −10	− 300
20 − 30	25	35	25 − 25 = 0	0
30 − 40	35	25	35 − 25 = 10	250
40 − 50	45	20	45 − 25 = 20	400
		N = Σf = 150		Σfdx = −1100 + 650 = −450

सूत्र = $\overline{X} = A + \frac{\Sigma fdx}{N}$

$\overline{X} = 25 + \frac{(-450)}{150} = 25 - \frac{450}{150} = 25 - 3$

$\overline{X} = 25 - 3$

$\overline{X} = 22$ ∴ मध्य प्राप्तांक = 22

Date............................ Teacher's Signature........................

माध्यिका (Median)

किसी समंक श्रेणी के मूल्यों को आरोही क्रम अथवा अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने के पश्चात जो मूल्य श्रेणी के मध्य में स्थित होता है उसे श्रेणी का माध्यिका मूल्य (Median Value) कहते है। उदाहरण के लिये यदि 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 किसी समंक श्रेणी के सात मूल्य है तो इस श्रेणी का चतुर्थ मूल्य अर्थात 11 माध्यिका मूल्य होगा, क्योंकि यह मूल्य श्रेणी के मध्य में स्थित है।

I व्यक्तिगत श्रेणी में माध्यिका का निर्धारण (Determination of median in individual series)

व्यक्तिगत श्रेणी के पदो की संख्या मे 1 जोड़कर 2 से भाग देने पर जो संख्या प्राप्त होती है उसी संख्या के क्रमांक वाला पद माध्यिका होगा परन्तु इसके लिये श्रेणी का आरोही अथवा अवरोही क्रम में पूर्व व्यवस्थित होना आवश्यक है। व्यक्तिगत श्रेणी में माध्यिका ज्ञात करने की इस विधि को निम्नलिखित सूत्र के द्वारा व्यक्त किया जाता है।

$$M = \frac{N+1}{2} \text{ वां पद}$$

M = माध्यिका, N = श्रेणी के पदो की संख्या।

Example = निम्न लिखित आँकडो में माध्यिका मूल्य ज्ञात कीजिये :-

5, 8, 4, 3, 6, 11, 7, 10, 9, 17, 12, 13, 15, 18, 16, 14, 2

हल :- आँकडो को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18

सूत्र के अनुसार = $M = \frac{N+1}{2}$ वां पद $= \frac{17+1}{2} = \frac{18}{2} = 9$ वां पद

M = 9 वां पद

$$\boxed{M = 10}$$

II खण्डित श्रेणी में माध्यिका का निर्धारण

Example-2 निम्नलिखित आकडो मे माध्यिका मूल्य ज्ञात कीजिये

4, 6, 8, 2, 5, 3, 1, 12, 18, 20, 19, 21

हल:- दिये हुये आकडो को आरोही क्रम में रखने पर

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 18, 19, 20, 21

सूत्र के अनुसार :- $M = \frac{N+1}{2}$ वां पद

$M = \frac{12+1}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$ वां पद

अतः स्पष्ट है कि 6.5 वां पद श्रेणी के छठे व सातवे पद के मध्य होगा।

∴ माध्यिका मूल्य (M)

$= \frac{\text{छठे पद का मूल्य} + \text{सातवे पद का मूल्य}}{2}$

$= \frac{6+8}{2} = \frac{14}{2}$

$\boxed{M = 7}$

Date.............................. Teacher's Signature..........................

II खण्डित श्रेणी में माध्यिका का निर्धारण (Determination of median in discrete Series)

यदि श्रेणी खण्डित है अर्थात मूल्यों की आवृत्तियाँ दी हुयी है तो माध्यिका ज्ञात करने के लिये सर्वप्रथम श्रेणी के मूल्यों को आरोही या अवरोही क्रम में रखकर उनकी संचयी आवृत्ति निकालते हैं उसके पश्चात पहले बतलाये गये सूत्र $M = (N+1)/2$ के प्रयोग द्वारा श्रेणी में माध्यिका मूल्य की क्रम संख्या ज्ञात की जाती है। जिस संचयी आवृत्ति पर क्रम संख्या सबसे पहली बार सम्मिलित होती होती है उस संचयी आवृत्ति के समक्ष लिखा मूल्य अभीष्ट माध्यिका मूल्य होता है। यह बात ध्यान रखने योग्य है कि सूत्र मे N का मान आवृत्तियो की कुल संख्या का योग होता है।

Example:- निम्नलिखित सारणी से माध्यिका मूल्य ज्ञात कीजिये।-

मूल्य	10	15	20	25	30	35	40	45	50
आवृत्ति	8	7	9	14	18	10	12	15	20
	55								
	17								

Teacher's Signature: ....

HAWAMAHAL
Page :
Date : / /

हल :-

माध्यिका मूल्य की गणना

मूल्य	आवृति	संचयी आवृति
10	8	8
15	7	15
20	9	24
25	14	38
30	18	56
35	10	66
40	12	78
45	15	93
50	20	113
55	17	130
	N = 130	

सूत्र के अनुसार :-

$$M = \frac{N+1}{2} \text{ वां पद}$$

$$M = \frac{130+1}{2} = \frac{[illegible]}{2} = 65.5 \text{ वां पद}$$

अतः M (माध्यिका मूल्य) = 35

(∵ 65.5 वां पद संचयी आवृति संख्या 66 में प्रथम बार सम्मिलित हुआ है।)

Teacher's Signature: ....

HAWAMAHAL
Page :
Date : / /

III अविच्छिन्न श्रेणी में माध्यिका का निर्धारण (Determination of median in continuous Series)

अविच्छिन्न श्रेणी में माध्यिका ज्ञात करने के लिये सबसे पहले संचयी आवृति ज्ञात की जाती है और उसके पश्चात् $M = N/2$ सूत्र के द्वारा माध्यिका वर्गान्तर (median class - interval) निश्चित करते हैं। यह ध्यान देने योग्य है कि अखण्डित श्रेणी में माध्यिका वर्गान्तर ज्ञात करने के लिये $M = N/2$ सूत्र प्रयोग करते हैं। न कि $M = (N+1)/2$ का। क्रम संख्या ज्ञात हो जाने पर यह देखा जाता है कि वह संख्या किस संचयी आवृति में प्रथम बार सम्मिलित हुयी है और जिस संचयी आवृति में वह प्रथम बार सम्मिलित पायी जाती है उसी संचयी आवृति का वर्गान्तर माध्यिका वर्गान्तर होगा। माध्यिका मूल्य ज्ञात करने के लिये निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

$$M = l + \frac{i}{f}(m - c)$$

M = माध्यिका मूल्य, l = माध्यिका वर्गान्तर की निचली सीमा, i = माध्यिका वर्गान्तर, f = माध्यिका वर्गान्तर की आवृति

m = माध्यिका वर्गान्तर का क्रम, c = माध्यिका वर्गान्तर से पहले की संचयी आवृति

Example :-

निम्नलिखित सारणी में 200 परीक्षार्थियों के प्राप्तांक दिये गये हैं। माध्यिका ज्ञात कीजिये।

प्राप्तांक	परीक्षार्थियों की संख्या
0 – 10	16
10 – 20	60
20 – 30	80
30 – 40	24
40 – 50	20

Date.............................. Teacher's Signature..........................

HAWAMAHAL
Page :
Date : / /

हल :- माध्यिका प्राप्तांक की गणना

प्राप्तांक (वर्गान्तर)	परीक्षार्थी संख्या (आवृति)	संचयी आवृति
0-10	16	16
10-20	60	76 C
L 20-30	80 f	156
30-40	24	180
40-5	20	200
	N = 200	

सूत्र के अनुसार = $M = \frac{N}{2}$ वां वर्गान्तर M = माध्यिका वर्गान्तर की क्रम संख्या

$M = \frac{200}{2} = 100$ वां वर्गान्तर

∴ माध्यिका वर्गान्तर = 20-30

(क्योंकि 100 पद संचयी आवृति 156 में प्रथम बार शामिल हुआ है।)

माध्यिका वर्गान्तर मे माध्यिका मूल्य निश्चित करने का सूत्र :

$M = l + \frac{i}{f}(m-c)$

L = 20, i = 10, f = 80
m = 100, C = 76

$M = 20 + \frac{10}{80}(100-76)$

$M = 20 + \frac{240}{80} = 20 + 3 = 23$

M = 23

Date..............................

Teacher's Signature..........................